

Leistungsgrenzen von Photowiderständen.

Von

HELMUT MÜSER, Frankfurt a. M.

(Eingegangen am 10. Februar 1951.)



Für den Photowiderstand gibt es eine Grenze der Leistungsfähigkeit durch das Widerstandsrauschen im Halbleiter. Diese Grenze wird in der vorliegenden Arbeit berechnet. Sie liegt im allgemeinen ungünstiger als die thermodynamische Schwankungsgrenze durch die Temperaturstrahlung der Umgebung. Es wird gezeigt, daß die Rauschgrenze auch dann nicht überschritten werden kann, wenn man langsam schwingende Galvanometer, Schmalbandverstärker und andere Vorrichtungen zur Unterdrückung des Rauschens anwendet. Zusätzlich wird aus den abgeleiteten Formeln eine Aussage über die Gültigkeitsgrenze der DRUDE-LORENTZschen Theorie gewonnen und eine Methode zur Messung der Konzentration von Leitungsträgern in Halbleitern aus Messungen des Rauschstromes vorgeschlagen.

1. Einleitung.

Die thermischen Empfänger zum Nachweis geringer Bestrahlungsstärken sind bis an die Grenze der thermodynamischen Schwankungen entwickelt, und die grundsätzlich gegebene Grenze ihrer Leistungsfähigkeit ist theoretisch von CZERNY¹ und von DAHLKE und HETTNER² begründet worden. EICHHORN und HETTNER³ haben eine allgemeine Theorie der Leistungsgrenzen von Strahlungsmeßinstrumenten gegeben, indem sie die Schwankungen der elektromagnetischen Hohlraumstrahlung der umgebenden Temperatur betrachten. Sie weisen auf die größeren Möglichkeiten hin, welche die lichtelektrischen Empfänger dadurch bieten, daß sie auf Frequenzen oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz nicht mehr ansprechen. Die Photowiderstände sind aber einer Grenze unterworfen, die durch das thermische Rauschen der Widerstände gegeben ist, und die um einige Zehnerpotenzen höher zu liegen scheint, als die Grenze nach EICHHORN und HETTNER. Im folgenden soll versucht werden, diese Grenze zu berechnen.

2. Statistische Schwankungen der Leitfähigkeit.

Die Anzahl n von freien Leitungsträgern in der Volumeneinheit eines Halbleiters denkt man sich im allgemeinen entstanden aus einem Gleichgewicht zwischen Entstehen und Vergehen nach einem Gesetz

$$\frac{dn}{dt} = a - \beta n \quad (1a)$$

¹ CZERNY, M.: Ann. Phys. **12**, 993 (1932).

² DAHLKE, W., u. G. HETTNER: Z. Physik **117**, 74 (1940).

³ EICHHORN, G., u. G. HETTNER: Ann. Phys. **3**, 120 (1948).



oder

$$\frac{dn}{dt} = a - \beta' n^2. \quad (1b)$$

a ist die Zahl der entstehenden, βn oder $\beta' n^2$ die Zahl der vergehenden Leitungsträger je Volumen- und Zeiteinheit. Es gilt (1a) oder (1b) je nachdem, ob man an eine mono- oder an eine bimolekulare Reaktion denkt. Wenn wir statistische Schwankungen von n oder die Veränderungen von n bei geringen Bestrahlungen betrachten, so wird es sich dabei um Änderungen ε handeln, die sehr klein gegen n sind. Setzen wir also $n = n_0 + \varepsilon$, so erhalten wir im Fall a

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\beta \varepsilon \quad (2a)$$

streng, im Fall b

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2\sqrt{a\beta'}\varepsilon = -2\beta'n_0\varepsilon \quad (2b)$$

unter Vernachlässigung des Gliedes mit ε^2 . Für die mittlere Anzahl n_0 der Leitungsträger und ihre mittlere Lebensdauer τ ergibt sich im Fall a

$$n_0 = \frac{a}{\beta}, \quad \tau = \frac{1}{\beta}; \quad (3a)$$

im Fall b

$$n_0 = \sqrt{\frac{a}{\beta'}}, \quad \tau = \frac{1}{2\sqrt{a\beta'}}. \quad (3b)$$

Werden lichtelektrisch ϕ Leitungsträger je Volumen- und Zeiteinheit zusätzlich erzeugt, so wird dadurch n um

$$\varepsilon_L = \phi \tau \quad (4)$$

Leitungsträger vergrößert. Ob diese ε_L Leitungsträger noch nachweisbar sind, hängt von der Größe des thermischen Rauschens ab.

Mit dem thermischen Rauschen in Halbleitern beschäftigt sich eine Arbeit von GISOLF¹. Dort sind zwei Anteile des Rauschstromes unterschieden: 1. das „NYQUIST-Rauschen“, das jeder Widerstand zeigt; es ist unabhängig von der Größe der an dem Widerstand liegenden Spannung; 2. ein Anteil, der durch statistische Schwankungen der Zahl der Leitungsträger im Halbleiter zustande kommt. Dieser zweite Anteil ist bei Metallen nicht vorhanden; der durch ihn hervorgerufene Rauschstrom ist der angelegten Spannung proportional. Für die Leistungsgrenze eines Photowiderstandes spielt der erste Anteil keine Rolle, weil der Photostrom durch Erhöhen der Spannung am Photowiderstand stets so weit gesteigert werden kann, daß er den (spannungsunabhängigen) „NYQUIST-Strom“ überwiegt. Die Grenze der Nachweismöglichkeit wird

¹ GISOLF, J. H.: Physica, Haag **15**, 825 (1949).

durch den zweiten Anteil bestimmt, nämlich durch die Schwankung von n um den Wert n_0 mit einem mittleren Schwankungsquadrat $\overline{\varepsilon_S^2}$.

Im Halbleiter gibt es sehr viele gebundene Elektronen, von denen nur ein verschwindend kleiner Bruchteil in der Zeiteinheit frei gemacht wird. Die Wahrscheinlichkeit für die Ablösung eines bestimmten Elektrons ist $\ll 1$, die Zahl der gebundenen Elektronen sehr groß; das Produkt beider hat einen endlichen Wert. Damit ist die Anwendung der Poisson'schen Formel zulässig: Wenn je Volumeneinheit in einem Zeitelement dt nach Gl. (1) $a \cdot dt$ Leitungsträger frei werden, so sind es in einem Halbleitervolumen V eine Anzahl $a \cdot V \cdot dt = a^* \cdot dt$ Leitungsträger¹; dies geschieht mit einem mittleren Schwankungsquadrat

$$\overline{\xi^2} = a^* dt. \quad (5)$$

Daraus ergibt sich für den Gesamtbestand an Leitungsträgern ein mittleres Schwankungsquadrat

$$\overline{\varepsilon_S^{*2}} = \frac{a^* \tau}{2}. \quad (6)$$

τ ist die Lebensdauer des freien Leitungsträgers.

Gl. (6) kommt so zustande: Es ist $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\tau}$; das gilt für $\varepsilon \ll n_0$ im monomolekularen wie im bimolekularen Fall [Gl. (2) mit (3) a oder b]. Entsprechend ist für das gesamte Volumen $\frac{d\varepsilon^*}{dt} = -\frac{\varepsilon^*}{\tau}$. Fassen wir ein bestimmtes Zeitelement von der Länge $dt \ll \tau$ ins Auge, so ändert sich ε^* in dieser Zeit um $d\varepsilon^* = -\varepsilon^* \frac{dt}{\tau} + \xi$; die Zahl der freigewordenen Leitungsträger ist in dem Zeitelement um ξ vom Regelwert $a^* \cdot dt$ abgewichen. Zu Beginn des Zeitelements haben wir $n_0^* + \varepsilon_0^*$ freie Leitungsträger, am Ende sind es $n_0^* + \varepsilon_1^* = n_0^* + \varepsilon_0^* + d\varepsilon^*$. Quadrieren und Mitteln ergibt bei Vernachlässigung von $\left(\frac{dt}{\tau}\right)^2$: $\overline{\varepsilon_1^{*2}} = \overline{\varepsilon_0^{*2}} \left(1 - \frac{2dt}{\tau}\right) + \overline{\xi^2}$, denn $\overline{\varepsilon^* \xi}$ verschwindet im Mittel wegen der statistischen Unabhängigkeit. Folglich wird wegen $\overline{\varepsilon_1^{*2}} = \overline{\varepsilon_0^{*2}} = \overline{\varepsilon_S^{*2}}$ das mittlere Schwankungsquadrat $\overline{\varepsilon_S^{*2}} = \overline{\xi^2} \frac{\tau}{2 dt}$; daraus folgt aber mit Gl. (5) unmittelbar Gl. (6).

Definieren wir als gerade noch nachweisbar eine Bestrahlungsstärke, bei der die Anzahl der lichtelektrisch ausgelösten Leitungsträger gleich der mittleren Schwankung ist, so wird diese Grenze erreicht, wenn $\varepsilon_L^* = \sqrt{\overline{\varepsilon_S^{*2}}}$ wird. Das ergibt

$$p \tau V = \sqrt{\frac{a V \tau}{2}}. \quad (7)$$

Eine Strahlung ist also noch nachweisbar, wenn sie mindestens

$$p = \sqrt{\frac{a}{2 V \tau}} \quad (8)$$

¹ Im Gegensatz zu den auf die Volumeneinheit bezogenen Größen sind die auf das Gesamtvolumen V bezogenen Größen mit einem Stern bezeichnet.

Leitungsträger je cm^3 und sec erzeugt. Ersetzen wir a noch durch die Zahl n_0 der Leitungsträger je Volumeneinheit im Dunkeln und ihre Lebensdauer τ , so erhalten wir nach Gl. (3) im monomolekularen Falle

$$a = \frac{n_0}{\tau}, \quad (9a)$$

im bimolekularen Falle

$$a = \frac{n_0}{2\tau}. \quad (9b)$$

Damit wird aus (8)

$$\phi = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{n_0}{cV}}. \quad (10)$$

c ist ein Zahlenfaktor, der je nach dem zugrunde gelegten Rekombinationsgesetz 2 oder 4 ist. In der Literatur werden zuweilen kompliziertere Rekombinationsgesetze angenommen, z.B. ein gemischter mono- und bimolekularer Vorgang. Dadurch wird der Faktor c geändert, aber nur innerhalb der Grenzen 2 und 4. Wenn man zuläßt, daß die Träger der Dunkelleitung eine Lebensdauer τ' haben, die durch Licht ausgelösten Leitungsträger eine andere Lebensdauer τ'' , so tritt in Gl. (10) an die Stelle von τ im Nenner die Größe $\sqrt{\tau' \tau''}$.

Unter den günstigsten Bedingungen wird eine dem Halbleiter zugeführte Strahlung von S Quanten je Zeiteinheit restlos absorbiert, und jedes absorbierte Quant erzeugt einen Leitungsträger. Dadurch werden je Volumen- und Zeiteinheit $\phi = S/V$ Leitungsträger gebildet. Eine Strahlung kann also noch nachgewiesen werden, wenn mindestens

$$S_{\min} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{n_0 V}{c}} \quad (11)$$

Quanten je Zeiteinheit eingestrahlt werden.

Aus Gl. (11) läßt sich ablesen, daß ein Photowiderstand um so günstiger arbeitet, je kleiner sein Volumen V ist, d. h. je kleiner seine Fläche F und seine Dicke d ist. Die Dicke des Halbleiters läßt sich nicht beliebig vermindern, weil die Strahlung sonst den Halbleiter durchsetzt, ohne absorbiert zu werden. Dagegen ist es günstig, die Fläche möglichst klein zu wählen und die zur Verfügung stehende Strahlungsleistung durch optische Vorrichtungen möglichst weit zu konzentrieren. Ferner ist es günstig, einen Halbleiter zu verwenden, der im Dunkeln wenig Leitungsträger enthält, also isoliert. Nun ist die Zahl der Leitungsträger in einem

Halbleiter proportional $e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$, wobei ΔE höchstens gleich dem Energiebetrag ist, der einem Quant an der Grenze der lichtelektrischen Wirksamkeit entspricht. Daraus folgt, daß die Wirksamkeit mit steigender Wellenlänge der lichtelektrischen Grenze etwa exponentiell abnimmt,

allerdings um so langsamer, je kleiner kT ist. Um geringe Strahlungsmengen großer Wellenlängen nachzuweisen, muß man also den Halbleiter kühlen. Schließlich ist die Grenze der Wirksamkeit um so günstiger, je größer die Lebensdauer der erzeugten Leitungsträger ist. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß ganz allgemein für die Beurteilung der Leistungsfähigkeit eines Meßinstrumentes auch die Zeit maßgebend ist, die zur Ausführung einer Messung benötigt wird. Nennt man die zur Ausführung einer Messung benötigte Zeit t_M , so ist für die Leistungsfähigkeit die Größe $S_{\min} \cdot \sqrt{t_M}$ maßgebend, und man erhält für einen lichtelektrischen Empfänger

$$S_{\min} \sqrt{t_M} = \frac{\sqrt{t_M}}{\tau} \sqrt{\frac{n_0 V}{c}}. \quad (12)$$

Ein Photowiderstand an einem genügend trägheitsfreien Meßinstrument erreicht aber schon innerhalb der Zeit τ seinen Endausschlag bis auf $1/e$. Grundsätzlich kann man also τ als Meßzeit ansetzen.

Praktisch sind die Zeiten τ als Meßzeiten häufig unbequem kurz. Es lassen sich aber immer meßtechnische Wege finden, um die Einstelldauer zu verlängern und dafür die Genauigkeit zu erhöhen. So erhalten wir schließlich als kennzeichnend für die Leistungsfähigkeit des Photowiderstandes den Ausdruck

$$S_{\min} \sqrt{t_M} = \sqrt{\frac{n_0 \cdot V}{c \cdot \tau}}. \quad (13)$$

Wenn man verschiedene Rekombinationszeiten für thermische und Photoelektronen ansetzt, wie es einige Autoren tun, so ist es die Lebensdauer der Photoelektronen, die die Meßzeit t_M bestimmt. In dem Ausdruck (13) ist also τ die Rekombinationszeit der thermischen Leitungsträger.

Die an einen Photowiderstand angeschlossenen Meßinstrumente, Galvanometer, Verstärker oder dergleichen, haben zunächst den Sinn, die bei schwacher Bestrahlung auftretenden kleinen Widerstandsänderungen in irgendwelche Ausschläge bequem meßbarer Größe umzusetzen. Diese triviale Funktion ist im Rahmen unserer Betrachtungen von untergeordneter Bedeutung, da die Verstärkung sinnlos wird, wenn das auftretende Rauschen größer ist als der zu messende Wert. Um die Ausnutzung der durch den Ausdruck (13) gegebenen Grenze zu ermöglichen, muß vielmehr eine andere Funktion erfüllt werden, die oben bereits angedeutet wurde: die Meßzeit t_M muß soweit heraufgesetzt werden, daß eine Ablesung bequem möglich wird; dafür muß der Rauschpegel um einen Faktor $\sqrt{\tau/t_M}$ herabgesetzt werden. Das läßt sich auf verschiedene Weise erreichen. Als wichtigste Beispiele sind in den Abschnitten 3 und 4 eine Gleichlichtmessung mit aperiodisch gedämpften Galvanometer und eine Wechsellichtmessung mit Verstärker näher betrachtet.

3. Der Lichtwiderstand am aperiodisch gedämpften Galvanometer.

Wir gehen bei dieser Betrachtung von der Berechnung der Größe L aus, die DAHLKE und HETTNER¹ bei der Untersuchung der Leistungsgrenze thermischer Strahlungsempfänger benutzen:

$$L = \frac{1}{S} \cdot \frac{\alpha_M}{\alpha_S} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_M}}. \quad (14)$$

Darin ist S die dem Empfänger zugeführte Leistung, α_M der am Meßgerät erzielte Ausschlag, α_S der Schwankungsausschlag (d.h. die Wurzel aus dem mittleren Schwankungsquadrat der spontanen Ausschläge), t_M die Meßzeit. Für unsere Zwecke wollen wir jedoch S in Quanten je Zeiteinheit rechnen. α_M und α_S denken wir uns nicht in Skalenteilen eines Ausschlages gemessen, sondern unmittelbar in Ampere, da wir es beim Photowiderstand stets mit Strömen zu tun haben. Von den S Quanten wird nur ein Bruchteil χ absorbiert, und von den absorbierten wird wieder nur ein Bruchteil η einen lichtelektrischen Effekt auslösen. Über die Größen χ und η macht unsere Theorie keine Aussage; es besteht kein prinzipielles Hindernis, sie dem Wert 1 beliebig anzunähern. Wenn wir die prinzipiell erreichbare Grenze untersuchen, werden wir daher weiter annehmen müssen, daß jedes auffallende Quant einen Leitungsträger erzeugt, d.h. wir setzen wie oben $p = S/V$.

Bei der Behandlung der Ausschläge, die durch Meß- und Schwankungsströme erzeugt werden, gehen wir wie ZERNIKE² bei der Betrachtung der Leistungsgrenzen eines Galvanometers vor. Wir denken uns ein Galvanometer genügender Empfindlichkeit, das aperiodisch gedämpft ist, und vergleichen die angezeigte Stromstärke u mit der tatsächlich fließenden i . Dieser Zusammenhang wird beherrscht durch die Differentialgleichung

$$\ddot{u} + 2\nu\dot{u} + \nu^2 u = \nu^2 i. \quad (15)$$

Für den Strom i haben wir zwei verschiedene Ansätze zu machen:

1. Für die Berechnung der Meßausschläge α_M ist i der Photostrom, der sich bei einer Lebensdauer τ der Leitungsträger nach einem zeitlichen Gesetz

$$i = i_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (16)$$

einstellt.

2. Für die Berechnung des Schwankungsausschlages α_S ist i eine zunächst gänzlich unbekannte Funktion der Zeit, die den regellosen spontanen Stromschwankungen des Rauschens entspricht.

¹ DAHLKE, W., u. G. HETTNER: Z. Physik **117**, 74 (1940).

² ZERNIKE, F.: Z. Physik **40**, 628 (1927).

Zu 1. unterscheiden wir noch zwei Fälle:

a) $\nu \ll \frac{1}{\tau}$, d.h. die Trägheit des Galvanometers ist groß gegen die Trägheit des photoelektrischen Prozesses. Das ist der üblicherweise vorliegende Fall; wir können so rechnen, als ob der Photostrom i sofort in vollem Betrage i_0 einsetzt;

b) $\nu \gg \frac{1}{\tau}$; dieser Fall liegt den theoretischen Betrachtungen des vorigen Abschnittes zugrunde, bei denen die mittlere Lebensdauer der Photoelektronen als Meßzeit eingeführt wurde. In diesem Falle macht sich die Trägheit des Galvanometers nicht bemerkbar, und es ist unmittelbar

$$u = i_0(1 - e^{-t/\tau}). \quad (17)$$

Um einen möglichst günstigen Wert für L zu erhalten, müssen wir die Meßzeit t_M so wählen, daß $\alpha_M/\sqrt{t_M}$ ein Maximum wird. Im Falle 1b ist also das Maximum der Größe $\frac{1 - e^{-t/\tau}}{\sqrt{t}}$ aufzusuchen. Man findet es numerisch für $t \approx 1,26 \tau$. Damit wird

$$\alpha_M = i_0(1 - e^{-1,26}) \approx 0,715 i_0. \quad (18)$$

Dabei ist i_0 der Photostrom, der zusätzlich zum Dunkelstrom I durch die Belichtung erzeugt wird. Nun hat die Gl. (4) gezeigt, daß bei n_0 Dunkelleitungsträgern $\varepsilon_L = p\tau$ Leitungsträger je cm^3 zusätzlich erzeugt werden. Es gilt also

$$\frac{i_0}{I} = \frac{p\tau}{n_0}. \quad (19)$$

Das mittlere Schwankungsquadrat des Rauschstromes, bezogen auf den fließenden Gleichstrom, wird

$$\frac{\sqrt{i_S^2}}{I} = \frac{\sqrt{\varepsilon_S^2}}{n_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_S^2}}{n_0 V}, \quad (20)$$

und das ist nach (6)

$$\frac{\sqrt{i_S^2}}{I} = \frac{1}{n_0} \sqrt{\frac{a\tau}{2V}}. \quad (21)$$

Ersetzen wir die Größe a nach (9) wieder durch $2n_0/c\tau$, so wird

$$\frac{\sqrt{i_S^2}}{I} = \frac{1}{\sqrt{c \cdot n_0 \cdot V}}. \quad (22)$$

Auf diese Gleichung werden wir im Abschnitt 6 noch zurückkommen.

Solange das Galvanometer die Stromschwankungen im wesentlichen trägheitsfrei mitmacht (Fall 1b), ist $\sqrt{i_S^2}$ unmittelbar die Schwankung α_S

in der Stromanzeige. Damit wird

$$L = \frac{1}{S} \cdot \frac{0,715 p \tau \cdot \sqrt{c n_0 V}}{n_0 \sqrt{1,26 \tau}}, \quad (23)$$

und mit $p = S/V$

$$L = 0,638 \sqrt{\frac{c \cdot \tau}{n_0 \cdot V}}. \quad (24)$$

Es wird praktisch kaum möglich sein, ein Galvanometer so geringer Schwingungsdauer zu finden, daß die Bedingung (Fall 1b) erfüllt ist. Außerdem müßte man zur vollen Ausnutzung eines solchen Instrumentes $1/1,26 \tau$ Ablesungen in der Sekunde machen und über die Ergebnisse mitteln, um die theoretisch mögliche Genauigkeit zu erhalten. Man wird also ein Galvanometer wählen, das sich langsam einstellt und dafür das Rauschen unterdrückt (Fall 1a). Um diesen Fall zu übersehen, müssen wir die Differentialgleichung (15) des aperiodischen Galvanometers für $\nu \ll \frac{1}{\tau}$ lösen. Diese Aufgabe ist bei ZERNIKE (l. c.) durchgeführt. Sein Ergebnis ist mit unseren Bezeichnungen

$$\overline{u^2} = \frac{\nu \tau}{2} \overline{i_S^2}. \quad (25)$$

Nach dem Einschalten des Meßstromes wird sich das Instrument nach der Funktion

$$i = i_0 [1 - (1 + \nu t) e^{-\nu t}] \quad (26)$$

auf den Endwert i_0 einstellen. Um eine günstige Meßzeit t_M zu erhalten, suchen wir hier das Maximum von $\frac{1 - (1 + \nu t) e^{-\nu t}}{\sqrt{t}}$ auf. Man findet es numerisch für $\nu t \approx 3,21$. Mit einer Meßzeit $t_M = 3,21/\nu$ und dem Schwankungsausschlag aus (25) und (22) erhalten wir

$$L = 0,656 \sqrt{\frac{c \cdot \tau}{n_0 \cdot V}}. \quad (27)$$

Das ist aber mit einem geringfügig anderen Zahlenfaktor wieder der Wert von (24).

4. Der Lichtwiderstand am Resonanzverstärker.

Wir betrachten nun eine Anordnung, die in der Praxis wegen der bequemen Verstärkungsmöglichkeit für Wechselströme eine große Rolle spielt: der Photowiderstand wird einer Wechselbelichtung ausgesetzt, und die entstehenden Wechselspannungen werden verstärkt. Zugleich mit den Photospannungen werden auch Spannungsschwankungen verstärkt, die der Halbleiter verursacht. Damit ist auch hier wieder durch den Rausch die Leistungsgrenze des lichtelektrischen Empfängers

gegeben. Auf den ersten Blick scheint es nun so, als ob der Rausch durch Wahl eines Verstärkers mit sehr engem Frequenzband beliebig herabgedrückt werden könnte. Tatsächlich ist aber eine Grenze für die Größe L gegeben, die der Formel (24) entspricht. Um das zu erkennen, denken wir uns den Lichtwiderstand durch Wechsellicht der Kreisfrequenz ω belichtet. Der Verstärker verstärke die auftretenden Wechselspannungen in einem Frequenzband um ω , und das Ausgangsinstrument zeige trägheitsfrei die verstärkte Spannung an. Wenn der Verstärker nur ein sehr enges Frequenzband verstärkt, so kann er einer plötzlichen Änderung der Wechselstromamplitude nicht mehr in beliebig kurzer Zeit folgen, sondern braucht eine endliche Zeit bis zur Einstellung auf den Endwert. Die Einengung des Frequenzbandes zur Unterdrückung des Rauschens vergrößert also die Meßzeit t_M , und die Größe L bleibt ungeändert.

Die durch die Enge des Frequenzbandes eintretende Verzögerung läßt sich mit den mathematischen Hilfsmitteln der Nachrichtentechnik sofort übersehen. Danach gilt, daß ein symmetrisches Schmalbandsystem für die Einhüllkurve eines Wechselstromschaltvorganges ebenso wirkt, wie ein Tiefpaß der halben Frequenzbreite auf einen Gleichstromschaltvorgang¹. Ferner ist die Einschwingzeit τ für den Gleichstromschaltvorgang bei einer Frequenzbreite von 0 bis zu einer Grenzfrequenz f_G : $\tau = 1/2f_G$ †. Ein Verstärker der Bandbreite Δf stellt sich also beim Einschalten eines Wechselstromes in Zeiten der Größenordnung $1/\Delta f$ auf seinen Endwert ein.

Andererseits wird das Rauschen durch ein schmales Frequenzband des Verstärkers unterdrückt. GISOLF² gibt eine Formel für die Frequenzabhängigkeit des Rauschens in einem Halbleiter an, die in unserer Bezeichnung folgendermaßen lautet:

$$\overline{i_\omega^2} = I^2 \cdot \frac{\tau}{2\pi n_0 V} \int_{\omega}^{\omega + \Delta\omega} \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau/2} \right)^2 d\omega. \quad (28)$$

Für eine genügend kleine Lichtwechselfrequenz ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) ist das Integral gleich der Bandbreite, also für $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$:

$$\overline{i_\omega^2} = I^2 \frac{\tau \Delta f}{n_0 V}. \quad (29)$$

¹ KÜPFMÜLLER, K.: Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung, S. 73. Stuttgart 1949.

† KÜPFMÜLLER, K.: Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung, S. 47, Formel 195.

² GISOLF, J. H.: Physica, Haag **15**, 825 (1949).

Wir erhalten das Gesamtrauschen durch Integration über alle ω ; wegen

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \text{ wird}$$

$$\overline{i_{\text{ges}}^2} = I^2 \cdot \frac{1}{2n_0 V} \quad (30)$$

in völliger Übereinstimmung mit der auf anderem Wege abgeleiteten Gl. (22) für den Fall der monomolekularen Reaktion ($c=2$). Das Rauschen wirkt also nur zu einem Bruchteil

$$\sqrt{\frac{\overline{i_{\omega}^2}}{\overline{i_{\text{ges}}^2}}} = \sqrt{2\tau\Delta f}. \quad (31)$$

Um diesen Faktor wird der Schwankungsausschlag verkleinert; da aber gleichzeitig $\sqrt{t_M}$ im Nenner von (14) erscheint und $t_M \approx 1/\Delta f$ ist, so bleibt (24) bis auf einen Faktor $\sqrt{2}$ bestehen, der unwesentlich ist, da wir in dem Faktor c ohnehin eine Unsicherheit um einen Faktor $\sqrt{2}$ mitführen¹.

Unsere Überlegungen haben gezeigt, daß die Verwendung eines Resonanzverstärkers keine grundsätzliche Verschiebung der Nachweisgrenze eines Lichtwiderstandes bringen kann. Die Unterdrückung des Rauschens wird durch eine Erhöhung der Meßzeiten erkaufte, die erwünscht ist. Bequeme Meßzeiten in der Größenordnung von Sekunden werden erst erreicht bei Bandbreiten der Größenordnung 1 Hz. Aus praktischen Gründen wird man daher den Verstärker mit einem trägen Ausgangsinstrument oder anderen die Meßzeit vergrößernden Elementen in der Schaltung verbinden.

5. Leistungsgrenze eines PbS-Lichtwiderstandes als Zahlenbeispiel.

Am Beispiel eines PbS-Lichtwiderstandes wird im folgenden gezeigt, daß die abgeleiteten Formeln zu den richtigen Größenordnungen führen, und daß die nach EICHORN und HETTNER² zu erwartende Grenze mit einem Lichtwiderstand nicht zu erreichen ist, weil sie durch die Rauschgrenze überdeckt wird.

Gl. (10) gibt die geringste nachweisbare Strahlungsleistung in Quanten je Zeiteinheit an. Die darin auftretende Größe n_0 ist die Zahl der Leitungsträger je Volumeneinheit, für die eine untere Grenze zu suchen ist. Sie kann nicht kleiner sein als der Wert, den man theoretisch für

¹ Eine genauere Diskussion der Möglichkeiten, die noch durch optimalen Verlauf des Übertragungsfaktors innerhalb des Frequenzbandes offen bleiben, würde zeigen, daß unter günstigsten Bedingungen $\sqrt{2}$ zum Verschwinden gebracht wird.

² EICHORN, G., u. G. HETTNER: Ann. Phys. **3**, 120 (1948).

einen Eigenhalbleiter erhält. Das ist nach einer bekannten Formel aus der quantenmechanischen Theorie:

$$n_0 = \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} \quad (32)$$

Setzt man als Bandabstand ΔE den Wert ein, der sich aus der Grenzwellenlänge des PbS ($2,7 \mu$) ergibt, und setzt man weiter für m als untere Grenze die Ruhmasse des freien Elektrons, so erhält man für n_0 etwa $1,8 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$.

Die weiteren Größen in Gl. (10) seien wie folgt angenommen:

Fläche: $\frac{1}{4} \text{ mm}^2$, Dicke 5μ , Lebensdauer $2 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$. Mit diesen Zahlenwerten erhält man für eine Strahlung der Grenzwellenlänge $2,7 \mu$ als nachweisbare Minimalleistung

$$S_{\min} = 4,9 \cdot 10^{-11} \text{ W} \quad (33 \text{ a})$$

für den monomolekularen bzw.

$$S_{\min} = 3,5 \cdot 10^{-11} \text{ W} \quad (33 \text{ b})$$

für den bimolekularen Fall. Die eingesetzten Zahlenwerte entsprechen den Verhältnissen bei Zimmertemperatur.

Mit einer PbS-Schicht der angegebenen Dimensionen wurde bei einer Versuchsmessung eine Leistung von 10^{-9} W ohne Kühlung der Schicht nachgewiesen. Damit wäre man bis auf einen Faktor $20 \dots 30$ an die theoretische Nachweisgrenze herangekommen. Eine wesentliche Steigerung dürfte also nicht mehr möglich sein. Abgesehen davon, daß die idealen Verhältnisse nicht zu verwirklichen sind, wird in der Rechnung nicht berücksichtigt, daß 1. Verluste dadurch auftreten, daß ein Teil der Strahlung reflektiert oder durchgelassen wird, und 2. die Strahlung nicht nur aus Quanten der Grenzwellenlänge $2,7 \mu$ bestand; jedes kürzerwellige Quant erfordert aber, in Watt gerechnet, einen höheren Leistungsaufwand je freigesetztes Elektron.

Der Berechnung der Minimalleistung nach EICHORN und HETTNER¹ liefert demgegenüber unter Verwendung der angegebenen Zahlenwerte

$$S_{\min} = 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ W}. \quad (34)$$

Wenn die Grenzwellenlänge zu kürzeren Wellenlängen rückt, wird der Unterschied zwischen den beiden Theorien noch größer.

6. Folgerungen aus der Größe des Halbleiterrauschens.

An die vorgetragenen Überlegungen seien noch zwei Bemerkungen angeschlossen, die aus der Theorie wichtige Beziehungen für die physikalischen Grundlagen der Erscheinungen ableiten.

¹ EICHORN, G., u. G. HETTNER: Ann. Phys. **3**, 120 (1948).

Am Anfang haben wir festgestellt, daß das typische, spannungsproportionale Halbleiterrauschen mit dem spannungsunabhängigen „NYQUIST-Rauschen“ in Konkurrenz tritt, das jedem Leiter eigen ist. Wir untersuchen nun, was es bedeutet, wenn NYQUIST-Rauschen und Halbleiterrauschen gerade gleich groß sind. In diesem Falle ist für einen Frequenzbereich Δf

$$\frac{4 k T}{R} \Delta f = I^2 \frac{\tau}{n_0 V} \Delta f. \quad (35)$$

Links steht die bekannte Formel für das NYQUIST-Rauschen, rechts unser Ausdruck (29). Nun ist $I^2 \cdot R \cdot \tau$ die Energie, die dem Halbleiter in der Zeit τ durch den Strom I zugeführt wird, $n_0 V$ die Gesamtzahl der freien Leitungsträger. Gl. (35) besteht also, wenn die von einem Leitungsträger während seiner Lebensdauer aus dem Feld angesammelte Energie im Mittel $4 k T$ beträgt. In einem Frequenzbereich Δf um eine Frequenz $f \ll \frac{1}{\tau}$ wird also das eigentliche Halbleiterrauschen gegenüber dem NYQUIST-Rauschen überwiegen, wenn das Elektron während seiner Lebensdauer eine Energie gewinnt, die groß gegen $4 k T$ ist.

In der alten Metalltheorie von DRUDE und LORENTZ wird gerade vorausgesetzt, daß ein Elektron zwischen zwei Zusammenstößen nicht eine Energie aus dem Feld aufnimmt, die groß gegen $k T$ ist. Die alte Theorie, die bei den Metallen wegen der Entartung des Elektronengases versagt, versagt also auch beim Halbleiter, sobald man Spannungen anlegt, die das spannungsproportionale Rauschen groß gegen das NYQUIST-Rauschen werden lassen.

Eine zweite Bemerkung betrifft die Gl. (22). Hier kommt auf der rechten Seite neben einem Zahlenfaktor nur das Produkt $n_0 V$ vor, das ist die Gesamtzahl der Leitungsträger in dem betrachteten Halbleiter. Man hat also hier die Möglichkeit, die Zahl der Leitungsträger im Halbleiter zu ermitteln. Dies ist bisher nur mit Hilfe des Halleffektes möglich, der insbesondere bei hohen Widerständen des Halbleiters versagt. Im Gegensatz dazu ist die hier vorgeschlagene Methode gerade dann günstig, wenn hohe Widerstände vorliegen, weil dann die Rauschströme relativ groß sind.

Nachtrag.

Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit erhielten wir Kenntnis von einer Arbeit von MOSS¹, die sich mit den Leistungsgrenzen von PbS- und PbTe-Lichtwiderständen befaßt. Diese Arbeit berechnet die Stromschwankungen, die durch Schwankungen in der Temperaturstrahlung der Umgebung entstehen. Solche Schwankungen bewirken Schwankungen der vor sich gehenden photoelektrischen Prozesse. Unser allgemeinerer Ansatz (6) umfaßt dagegen alle Prozesse, durch die Elektronen

¹ MOSS, T. S.: J. opt. Soc. Amer. **40**, 603 (1950).

befreit werden können, also neben den photoelektrischen Prozessen insbesondere auch die Befreiung von Elektronen durch die thermische Energie der Gitterschwingungen (Schallquanten), die im allgemeinen sehr viel zahlreicher sind und auch größere Schwankungen hervorrufen als die photoelektrischen Prozesse. Der Unterschied macht für das Beispiel des PbS bei Zimmertemperatur etwa drei Zehnerpotenzen aus, wie oben berechnet [vgl. oben (33) und (34); die Grenze (34) stimmt mit der von Moss berechneten größenordnungsmäßig überein, der Unterschied entsteht durch die etwas verschiedenen angenommenen Zahlenwerte für die Grenzwellenlänge des PbS]. Für das in der Arbeit von Moss¹ vorwiegend behandelte Beispiel eines gekühlten Halbleiters in einer ungekühlten Umgebung ist die dort verwendete Theorie vollkommen zutreffend, weil im gekühlten Halbleiter die thermische Gitterbewegung eingefroren ist. Dagegen wird diese die Verbesserung der Leistungsgrenze zunichte machen, die nach Moss durch die Verschiebung der Grenzwellenlänge nach kürzeren Wellen beim Erwärmen des Halbleiters erwartet werden sollte. Tatsächlich widerspricht es unseres Wissens der Erfahrung, daß die Empfindlichkeitsgrenze des kalten Lichtwiderstandes ungünstiger sein sollte als die eines ungekühlten, eine Folgerung, die auch in der genannten Arbeit selbst als eine nur theoretische bezeichnet wird.

Frankfurt a. M., Physikalisches Institut der Universität.